

Les CALCULS de RISQUES et leur APPLICATION à la FINANCE

Raymond BRUMMELHUIS. * Dominique GUÉGAN †

Le calcul des risques en finance est un problème fondamental qui, depuis la faillite spectaculaire de plusieurs banques et institutions financières dans les années '90 (notamment Barings et Long Term Capital Management ou LTCM), a pris une ampleur considérable. Plusieurs approches sont possibles pour calculer ces risques. Elles reposent sur un certain nombre d'hypothèses qu'il est nécessaire de vérifier si l'on ne veut pas que l'utilisation des mesures proposées amène de nouveau à sous estimer les risques, phénomène qui a joué un rôle important dans le débâcle du LTCM.

Une mesure communément utilisée dans les institutions financières est celle de la Valeur à Risque ou VaR, qui fut proposée par J.P. Morgan au début des années '90, et ensuite développée dans leur "RiskMetrics". Elle devint rapidement populaire car intuitive et facile à mettre en oeuvre. Néanmoins l'approche proposée dans RiskMetrics repose sur des hypothèses fortes qui ne sont pas en général vérifiées dans la pratique: indépendance des observations et Gaussianité de leur distribution. En effet les produits financiers, évoluant dans le temps ne sont pas indépendants et il fut plusieurs fois prouvé que leur distribution était loin de la loi normale.

Partant de ce constat, il est donc indispensable de se poser la question sur la "bonne" mesure des risques. Plusieurs travaux proposent des éléments de

*School of Economics, Mathematics and Statistics, Birkbeck College, University of London, Gresse Street, London W1T 1LL, United Kingdom; e-mail: r.brummelhuis@statistics.bbk.ac.uk

†Ecole Normale Supérieure de Cachan, GRID, UMR, CNRS 8534, 61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex, France; e-mail : guegan@grid.ens-cachan.fr

réflexion: mentionnons en particulier la notion de mesure de risque cohérente et celle, parentée, de "expected shortfall". Néanmoins la Valeur à Risque (VaR) semble être la mesure adoptée par la communauté financière et, par conséquent, le dénominateur commun à beaucoup de recherche.

Nous avons donc décidé de voir comment on pouvait proposer une mesure robuste du risque basée sur cette notion, la VaR. Pour cela nous sommes partis du constat que de nombreux produits financiers présentaient une volatilité importante et qu'il était raisonnable de les modéliser à l'aide de processus hétéroscédastiques tels que les processus ARCH ou GARCH. D'autre part, pour calculer une VaR, il faut faire un calcul de probabilité conditionnelle à un horizon donné, appelons le ici h , qui dans la pratique se situe entre 1 et 10 jours. L'ensemble d'information par rapport auquel se fait ce calcul de probabilité conditionnelle est basé sur les observations disponibles. Nous avons donc décidé de calculer cette probabilité conditionnelle sachant que les observations (les rendements des prix) suivaient un processus de type ARCH ou GARCH. Nous avons par ailleurs mené les calculs en supposant que la distribution du bruit qui intervenait dans l'expression du modèle pouvait être soit Gaussienne, Student, ou toute distribution à densité symétrique. En particulier, nos résultats s'appliquent sans problème à des cas où la loi de ce bruit a des "queues épaisses".

Ainsi, dans ce travail nous levons à la fois les deux hypothèses qui nous semblaient dangereuses dans beaucoup de travaux sur le sujet: à savoir, l'indépendance des observations, puisque nous supposons qu'elles sont modélisées par un processus GARCH, et la Gaussianité, puisque par construction la loi observée des observations ne peut plus être Gaussienne (et ceci même si le bruit sous-jacent au modèle est Gaussien, le processus GARCH étant un processus non linéaire). Notre travail donne, entre autres, un analyse précise de ce phénomène.

Finalement, notons que notre travail se distingue de la plupart des travaux antérieurs menés sur les processus GARCH en finance. En effet nous étudions directement pour ces processus, les probabilités conditionnelles à un horizon fixe mais arbitraire, tandis qu'habituellement, on suppose les observations stationnaires et on utilise cette distribution stationnaire pour estimer la VaR. Il nous semble que notre approche est plus adaptée à la réalité financière.

Nous avons ainsi obtenu l'expression analytique de la probabilité conditionnelle pour un processus GARCH à un horizon h , ce qui permet d'avoir la valeur exacte du quantile pour un seuil α donné et donc de la Valeur à

Risque pour ce seuil.

Néanmoins les calculs de risque ne sont intéressants que lorsque l'on se place dans les queues des distributions, étant donné qu'on veut calculer la VaR pour un seuil α petit. Nous avons donc ensuite considéré, pour un horizon h fixé, (d'un ou de plusieurs jours), le comportement asymptotique des distributions précédentes. On a cherché des expressions analytiques simples donnant ainsi une très bonne approximation de la probabilité d'existence des évènements extrêmes, qui, dans un contexte financier, se traduisent par des pertes excessives. Nous avons obtenu ces asymptotiques, ce qui nous a conduit à donner des bornes pour la Valeur à Risque. Notons en particulier que ce travail nous a permis d'établir que la fameuse "règle de \sqrt{h} " pour passer d'une VaR à un jour à une VaR à h jours, (qui fut à l'origine proposée par RiskMetrics, et ensuite adoptée par la commission de Basle pour la réglementation des banques (accords de Basle I et II)), est fautive. Ceci est d'autant plus vrai que le seuil α est petit. Un énoncé précis de ce résultat se trouve dans notre papier [1], corollaire 7.2. Il semble donc très dangereux de s'appuyer sur la règle habituellement connue si l'on sait que les séries financières étudiées sont hétéroscedastiques, et bien modélisées par des processus GARCH.

Des calculs de risques basés sur nos résultats sont faciles à mettre en oeuvre algorithmiquement puisque nous avons l'expression exacte des distributions. Nous sommes en train de mettre au point des programmes permettant d'utiliser les calculs qui sont effectués dans le document [1] que nous vous avons envoyé. Ainsi n'importe quelle banque ou organisme financier pourra disposer d'un outil lui permettant de faire un calcul de Valeur à Risque sous les hypothèses que nous avons proposées ici, et qui sont moins fortes que celles communément utilisées.

[1] Raymond Brummelhuis et Dominique Guégan: Multi-period conditional distribution functions for heteroscedastic models with applications to VaR, working paper (latest version: Fall 2001).